3. Fokozatos szűrés alkalmazása az I. rendű ikerprímeket nem reprezentáló elemeknek a potenciálisan I. rendű ikerprímeket reprezentáló elemek halmazától való elkülönítésére

3.1. A fokozatos szűrés műveletéhez kapcsolódó alapfogalmak

DEFINÍCIÓ 3.1.1. Az **ikerprímek fokozatos szűrése** olyan algoritmus, amellyel a potenciálisan ikerprímeket reprezentáló számtani középérték sorszámok szitálására módosított CPS alkalmazásával megjelölhető – összetett számokat reprezentáló – sorozatokat diszjunkt részsorozatokra konvertálva, majd ezeket fokozatosan elhagyva, lehetőség nyílik a szűrési fokozathoz rendelt küszöbérték felett a fokozattal bezárólag kiszűrt és ki nem szűrt elemek átlagos sűrűségének közelítő számítására.

DEFINÍCIÓ 3.1.2. Ha i pozitív sorszám, és $\Delta_0 := 1/6$, minden $i \geq 3$ esetben az i. szűrési fokozat **periódus**ai az 1) összefüggés [Lábjegyzet: 1. Bevezetés, 1)] szerinti egymást követő $\boldsymbol{n_A}$ **sorszámok**

23) $\boldsymbol{\Delta_i} \quad := \boldsymbol{\Delta_{i-1} P_i} = P_3 P_4 \ldots P_i = P_i\#/6$ páratlan elemszámú $\boldsymbol{(m\Delta_i + k_i\,,\ (m+1)\Delta_i + k_i]}$ **intervallumai:**

24) $\boldsymbol{(m\Delta_i + k_i\,,\ (m+1)\Delta_i + k_i] := \{n_A \mid m\Delta_i + k_i < n_A \leq (m+1)\Delta_i + k_i\}}$

$\boldsymbol{\Delta_i + j_i > k_i \geq j_i \geq j_a > k_{i^*} \geq 0}$ (j_i és j_a meghatározására l.: Definíció 3.1.3.)

$\boldsymbol{m = \ldots, -3, -2, 0, 1, 2, \ldots}$

$P_i\#$ konvencionális jelölés szerint P_i prímoriálisa: $P_i\# := \prod_{i=1}^{i} P_i$

A **periódus elemszám reciproká**nak jelölésére alkalmazzuk a v_i szimbólumot:

25) $\boldsymbol{v_i} \quad \boldsymbol{:= 1/\Delta_i} = 1/(\Delta_{i-1} P_i) = 6/P_i\# = \boldsymbol{3\prod_{i=2}^{i} P_i^{-1}}$

DEFINÍCIÓ 3.1.3. Az $i \geq 3$ szűrési fokozat $(m\Delta_i + j_i\,,\ (m+1)\Delta_i + j_i]$ periódusainak **j_i küszöbérték**e (l. még: Észrevétel 3.1.1.):

26) $\boldsymbol{j_i} \quad \boldsymbol{:= \mathrm{int}[(P_i+1)/6]}$ $\quad i \geq a \geq 3$ esetben:

27) $\boldsymbol{j_i \geq j_a := (n_{AI})_a} = (P_{Fa} + 1)/6 = (P_{Ba+1} - 1)/6 = (P_{Fa} + P_{Ba+1})/12$

$j_a = n_{Fa} + 1 = n_{Ba+1} \quad \Leftrightarrow \quad P_{Fa} = 6n_{Fa} + 5 = 6n_{Ba+1} - 1 \quad \wedge \quad P_{Ba+1} = 6n_{Ba+1} + 1 = P_{Fa} + 2$

ÉSZREVÉTEL 3.1.1. Az i. szűrési fokozat periódusaiban megegyezik a fokozattal bezárólag kiszűrt elemek, valamint a ki nem szűrt elemek sűrűsége, illetve száma. Ennek a követelménynek nem felel meg az i. szűrési fokozat 24) szerinti periódusaival egyező elemszámú $(-\Delta_i + k_i\,,\ k_i]$ n_A sorszám intervallum, amely ezért nem periódusa a fokozatnak: $m \neq -1$. A jelzett intervallum $[-j_i\,,\ j_i]$ részintervallumában ugyanis bizonyosan vannak ki nem szűrhető, I. rendű ikerprímeket reprezentáló $(-j_a\,;\, j_a)$ elem-párok, melyek kezdeti ($3 \leq a \leq 7$) sűrűsége maximális (l. még alább *):

$a_1 = 2 \qquad (P_2 = \mathbf{3};\ P_3 = \mathbf{5}) \quad \wedge \quad (-P_3;\ -P_2)$

$a_2 = 3 \qquad (P_{Fa2} = P_3 = \mathbf{5};\ P_{Ba2+1} = P_4 = \mathbf{7}) \quad \wedge \quad (-P_4;\ -P_3) \quad \Leftrightarrow \quad j_{a2} = (n_{AI})_3 = \mathbf{1}$

$a_3 = 5 \qquad (P_{Fa3} = P_5 = \mathbf{11};\ P_{Ba3+1} = P_6 = \mathbf{13}) \quad \wedge \quad (-P_6;\ -P_5) \quad \Leftrightarrow \quad j_{a3} = (n_{AI})_5 = \mathbf{2}$

$a_4 = 7 \qquad (P_{Fa4} = P_7 = \mathbf{17};\ P_{Ba4+1} = P_8 = \mathbf{19}) \quad \wedge \quad (-P_8;\ -P_7) \quad \Leftrightarrow \quad j_{a4} = (n_{AI})_7 = \mathbf{3}$

Ezzel szemben – az i. fokozattal bezárólag elvégzett szűrés után, minden $m \neq 0$ esetben – a $[-j_i\,,\ j_i]$ részintervallummal egyező elemszámú $[m\Delta_i - j_i\,,\ m\Delta_i + j_i]$ intervallumok 28) szerint ki nem szűrt, tehát potenciálisan I. rendű ikerprímeket reprezentáló $m\Delta_i := \Delta_{i/m}$ elemeken kívül, 29) szerint kizárólag kiszűrt elemeket tartalmaznak. $m = \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots$ és $3 \leq g \leq i$ feltételek mellett:

28) $P_g \nmid \Delta_{i/m} \pm 1 \qquad \Delta_{i/m} \not\equiv \pm 1 \pmod{P_g}$

29) $P_g \mid \Delta_{i/m} \pm \{6\,\mathrm{int}[(P_g+1)/6] + (-1 \vee 1)\} \qquad \Delta_{i/m} \equiv \pm P_g \pmod{P_g}$

*) Az I. rendű ikerprímek kezdeti maximális sűrűségét indokolja, hogy a 3. szűrési fokozatban az $(n_{AI})_3 = 1$ I. rendű ikerprímet reprezentáló sorszám kivételével kiszűrésre kerülnek (összetett számot reprezentálnak) azok az $n_{A\ddot{o}}$ sorszámok, melyeknek utolsó számjegye 1 és 6, illetve 4 és 9 (Lábjegyzet: I. r. ikerprímek fokozatos szűrése, 9. táblázat).

1. Bevezetés, 1) http://ikerprimek.oldalunk.hu/userimages/ikerprimek/files/1_bevez_5_www.oldalunk.hu_.pdf
I. r. ikerprímek fokozatos szűrése, 9. táblázat
http://www.ikerprimekfuggelek.oldalunk.hu/userimages/ikerprimekfuggelek/files/f09_ir_ip_sz_1_5_fok_www.oldalunk.hu_.pdf

Minden $i^* < a \le i$ esetben az $(\Delta_{i/m}+k_{i^*}\ ,\ \Delta_{i/m}+\Delta_i+k_{i^*}]$ intervallumok csak akkor tekinthetők az *i.* fokozat periódusainak, ha $m \neq 0, -1$. Ha ugyanis $\Delta_i+ j_i \ge \Delta_a+ j_a > k_a \ge j_a > k_{i^*} \ge 0$, akkor a ki nem szűrhető $-j_a$, illetve j_a elem miatt a $(-\Delta_i+k_{i^*}\ ,\ k_{i^*}]$, illetve a $(k_{i^*}\ ,\ \Delta_i+k_{i^*}]$ intervallumokból az *a.* fokozatban kiszűrhető elemek száma páratlan, és *1*-gyel kevesebb, mint az *a.* fokozat periódusaiban: az *a.* fokozat $(-\Delta_a+k_{i^*},\ k_{i^*}]$, illetve $(k_{i^*},\ \Delta_a+k_{i^*}]$ intervallumai azonosak az előbb jelzett intervallumokkal, vagy azok részintervallumai.

$m=0$ esetben, az *i* értékétől függetlenül ki nem szűrhető $\Delta_{i/0}=0$ elem, számtani középértéke a megegyező abszolút értékű, pozitív és negatív prím és összetett számokat, valamint prímkombinációkat reprezentáló elem-pároknak, illetve a $(-2;\ 2)$ II. rendű ikerprímnek.

DEFINÍCIÓ 3.1.4. Az n_A sorszámok páros elemszámú $[m\Delta_i\ ,\ (m+1)\Delta_i]$ intervallumainak számtani középértékei a **$T_{m/i}$ tükörpontok**, amelyek nem n_A sorszám elemek. A tükörpontok számértéke:

30) $\boldsymbol{T_{m/i} := T_{0/i} + m\Delta_i}$ $\quad 6T_{m/i} = D_{Tm/i} = 6T_{0/i} + m\,P_1\,P_2\,\Delta_i$ $\quad \boldsymbol{m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots}$

31) $\boldsymbol{T_{0/i} := \Delta_i/2}$ $\quad 6T_{0/i} = D_{T0/i} = 3\,\Delta_i = 6n_{D0/i} + 3$ $\quad \boldsymbol{m = 0}$

DEFINÍCIÓ 3.1.5. Nevezzük az *i.* szűrési fokozat **szimmetrikus periódus**ainak az n_A sorszámok 32) szerinti $\boldsymbol{(T_{m/i}\ ,\ T_{(m+1)/i})}$, illetve 33) szerinti $\boldsymbol{[\Delta_{i/m}\ ,\ \Delta_{i/m}+\Delta_i]}$ intervallumait:

32) $\boldsymbol{(T_{m/i}\ ,\ T_{(m+1)/i}) := \{n_A \mid (2m+1)\Delta_i/2 < n_A < (2m+3)\Delta_i/2\}}$
$\boldsymbol{m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots}$

33) $\boldsymbol{[\Delta_{i/m}\ ,\ \Delta_{i/m}+\Delta_i] := \{n_A \mid m\Delta_i \le n_A \le (m+1)\Delta_i\}}$
$\boldsymbol{m = \ldots, -3, -2, 1, 2, \ldots}$

ÉSZREVÉTEL 3.1.2. Minden $m \ge 0$ esetben a $T_{m/i}$ tükörpontok az n_A sorszám elemeknek a $(j_i\ ,\ 2\Delta_{i/m}+\Delta_i-j_i)$ intervallumaiban, illetve ezek $(\Delta_{i/m}+j_i\ ,\ \Delta_{i/m}+\Delta_i-j_i)$ részintervallumaiban az *i.* fokozattal bezárólag elvégzett szűrés esetén kizárólag (kiszűrt; kiszűrt), valamint (ki nem szűrt; ki nem szűrt) elempároknak a számtani középértékei. Az elempárok számértéke: (páros; páratlan).

Minden $m < 0$ esetben az észrevétel az n_A sorszám elemeknek a $(2\Delta_{i/m}+\Delta_i+j_i\ ,\ -j_i)$ intervallumaiban, illetve ezek $(\Delta_{i/m}-\Delta_i+j_i\ ,\ \Delta_{i/m}-j_i)$ részintervallumaiban teljesül.

Az Ikerprímek * Függelék IP honlap az I. rendű ikerprímek algoritmus szerinti fokozatos szűrésének példáját az 1.-5. fokozatra mutatja be (Lábjegyzet: I. r. ikerprímek fokozatos szűrése), szemléltetve, hogy a $T_{0/i}$ számtani középértékre nézve kiszűrt elempárok $(n_{AFö+1}\ ,\ n_{ABö})$ típusúak, tehát a 2) szerinti *F*, illetve *B* végtelen számtani sorozatba [Lábjegyzet: 1. Bevezetés, 2)] tartozó összetett számok sorszámai. Ez az észrevétel a szűrési fokozatok periodicitása miatt *m* lehetséges értékei mellett a $T_{m/i}$ tükörpontokra is vonatkozik.

Az *i.* szűrési fokozat esetében $T_{0/i}$ általában a $(0,\ \Delta_i]$ intervallumban kiszűrt 1. sorozattagok számtani középértéke, kivéve, ha valamely kiszűrt sorozat 1. tagja a $(0,\ j_i]$ részintervallum $j_i = j_a = (n_{AI})_a$ eleme, mivel ebben az esetben a sorozatnak ez, a 27) szerint meghatározott, I. rendű ikerprímet reprezentáló tagja nem szűrhető ki. Erre vonatkozóan l. még: Észrevétel 3.1.3.

Míg az *i.* fokozattal bezárólag kiszűrt, illetve ki nem szűrt elemek a szimmetrikus periódusok számtani középértékére vonatkozóan párosak, addig a Definíció 3.1.2. szerinti, Δ_i elemszámú periódusokon belül ez a párosíthatóság csak a periódusok részintervallumaira vonatkozik. Az utóbbi periódusokban a kiszűrt elemek száma páros, a ki nem szűrteké páratlan, mivel a fokozattal bezárólag 28) szerint a $\Delta_{i/m}$ elemek nem kerülnek kiszűrésre.

A $\Delta_{i/m}$ sorszám elemek számtani középértékek pl. a páratlan elemszámú

a) $[\Delta_{i/m}-\Delta_i-j_i\ ,\ \Delta_{i/m}+\Delta_i+j_i]$ intervallumokban, illetve ezek
b) $[\Delta_{i/m}-\Delta_i\ ,\ \Delta_{i/m}+\Delta_i]$, valamint
c) $(\Delta_{i/m}-\Delta_i+j_i\ ,\ \Delta_{i/m}+\Delta_i-j_i)$ és
d) $[(2\Delta_{i/m}-\Delta_i+1)/2,\ (2\Delta_{i/m}+\Delta_i-1)/2]$ részintervallumaiban, továbbá az
e) $[0,\ 2\Delta_{i/m}]$ intervallumokban.

I. r. ikerprímek fokozatos szűrése
http://www.ikerprimekfuggelek.oldalunk.hu/userimages/ikerprimekfuggelek/files/f09_ir_ip_sz_1_5_fok_www.oldalunk.hu_.pdf
1. Bevezetés, 2) http://ikerprimek.oldalunk.hu/userimages/ikerprimek/files/1_bevez_5_www.oldalunk.hu_.pdf

A $T_{m/i}$ tükörpontokhoz hasonlóan, a $\Delta_{i/m}$ sorszám elemek az i. fokozattal bezárólag elvégzett szűrés esetén kizárólag (kiszűrt; kiszűrt), valamint (ki nem szűrt; ki nem szűrt) elempároknak a számtani középértékei az
a) és b) intervallumok esetében, ha $m \neq \pm 1$
c) és d) intervallumok esetében m minden értéke mellett.
Az e) intervallumok esetére ez az észrevétel – m értékétől függetlenül – nem vonatkozik.

A $\Delta_{i/m}$ sorszám elemek kizárólag (páros; páros) és (páratlan; páratlan) elempároknak a számtani középértékei. Az i. fokozattal bezárólag elvégzett szűrés esetén a kiszűrt elempárok fele a 2) szerinti B, fele pedig az F végtelen számtani sorozatba [Lábjegyzet: 1. Bevezetés, 2)] tartozó, a $6\Delta_{i/m}$ számtani középértékekre nézve szintén párosítható, bennfoglalt sorozatokat alkotó összetett számok miatt kerültek kiszűrésre.

A $(T_{m/i}, T_{(m+1)/i})$ szimmetrikus periódusok számtani középértékei: $\Delta_{i/m} + \Delta_i$
elemszámaik páratlanok: Δ_i

A $[\Delta_{i/m}+\Delta_i, \Delta_{i/m}+2\Delta_i]$ szimmetrikus periódusok számtani középértékei: $T_{(m+1)/i}$
elemszámaik párosak: Δ_i+1

DEFINÍCIÓ 3.1.6. Az i. szűrési fokozathoz az n_A sorszámokat Δ_i különbségű számtani sorozatokba rendezzük, ezért ez lesz a fokozatban kiszűrt végtelen számtani sorozatok különbsége is. A fokozat periódusaiba így a fokozatban kiszűrt valamennyi sorozatnak egy-egy tagja tartozik.

Az i. szűrési **fokozat szegmensei**nek nevezzük a fokozatot megelőzően még ki nem szűrt n_A sorszámoknak a $[0, \Delta_{i+1})$ intervallumba tartozó, az algoritmus szerint rendezett P_i számú sorait.

A **szegmensek sorai**t az i. szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt, valamint a fokozatban kiszűrésre kerülő, Δ_i különbségű végtelen számtani sorozatok legkisebb pozitív P_{i+1} számú tagjai alkotják.

A sorok azonos sorszámú tagjainak Δ_{i-1} különbségű, P_i tagszámú számtani sorozatai a **szegmensek oszlopai**.

Minden $i \geq 3$ esetben a **szegmensek száma**:

34) $\mathbf{Z_i := Z_{i-1}(P_{i-1}-2)} = (P_2-2)(P_3-2)\ldots(P_{i-1}-2) \quad = \prod_{i=3}^{i}(P_{i-1} - 2)$

DEFINÍCIÓ 3.1.7. Az i. szűrési fokozatban a szegmensek P_i számú sorai közül 2 sor kerül kiszűrésre. Ezek egyike a 2) szerinti B, a másik az F sorozatból kiszűrt végtelen számtani részsorozatok első P_{i+1} számú tagjainak sorszámai. Eszerint az i. szűrési **fokozatban kiszűrt sorozatok száma** $(i \geq 3)$:

35) $\mathbf{K_i := 2Z_i} = 2(P_2-2)(P_3-2)\ldots(P_{i-1}-2) \quad = 2\prod_{i=3}^{i}(P_{i-1} - 2)$

K_i megegyezik az i. szűrési fokozatban **periódusonként kiszűrt elemek számá**val.

DEFINÍCIÓ 3.1.8. Az i. szűrési fokozatban a kiszűrt végtelen számtani sorozatokkal megegyező különbségű **ki nem szűrt sorozatok száma** a fokozat szegmens-számának (Z_i) és a szegmensenkénti ki nem szűrt sorok számának $(P_i\text{-}2)$ szorzata:

36) $\boldsymbol{\delta_i} \mathbf{:= Z_i(P_i-2) = Z_{i+1}} = (P_2-2)(P_3-2)\ldots(P_{i-1}-2)(P_i-2) \quad = \prod_{i=2}^{i}(P_i - 2)$

DEFINÍCIÓ 3.1.9. Az I. rendű ikerprímek szűrésének i. fokozatában az n_A sorszámok közül a P_i-vel osztható számokat reprezentáló, a megelőző fokozatokban még ki nem szűrt elemeket szűrjük ki. Ezért az $i \geq 3$ szűrési fokozatok pozitív tartományában a **kiszűrésre kerülő legkisebb elem (n_{Aik}) alsó korlátja (n_{Ai})**:

37) $(T_{0/i})_{i>3} \quad > (n_{Aik})_{i>3} \quad \geq n_{Ai} \quad := (P_i^2-1)/6 \quad \geq k_{i\#} \quad \geq j_i \quad = \mathrm{int}[(P_i+1)/6] \quad \geq 1$
$T_{0/3} = 2{,}5 \quad < n_{A3k} \quad = n_{A3} \quad = (P_3^2-1)/6 \quad = 4 \quad > j_3 \quad = (P_3+1)/6 \quad = 1$

Minden $k_i = k_{i\#}$ esetben, az $(m\Delta_i+k_{i\#}, (m+1)\Delta_i+k_{i\#}]$ periódusoknak bizonyosan csak akkor eleme a fokozatban kiszűrt valamennyi elem, ha a 24) szerinti $\Delta_i+j_i > k_i \geq j_i$ korlátozáson túl a $\Delta_i+j_i > n_{Ai} \geq k_{i\#} \geq j_i$ korlátozás is teljesül.

1. Bevezetés, 2) http://ikerprimek.oldalunk.hu/userimages/ikerprimek/files/1_bevez_5_www.oldalunk.hu_.pdf

DEFINÍCIÓ 3.1.10. Valamely szűrési fokozatban a kiszűrésre kerülő sorozatok **kezdő sorozata** a legkisebb pozitív tagot tartalmazó sorozat.

ÉSZREVÉTEL 3.1.3. A 27) összefüggés szerint, $i \geq a$ esetén, a P_{Fa} prímhez rendelt j_a sorszám elem a kezdő sorozat 1. tagja, az n_{Aa} alsó korlátnál kisebb, I. rendű ikerprímet reprezentál, tehát nem szűrhető ki. A kiszűrésre kerülő legkisebb n_{Aak} elem egy másik, a kezdő sorozattól eltérő sorozat tagja lesz:

$$j_a = (P_{Fa}+P_{Ba+1})/12 = (n_{AI})_a < n_{Aa} = (P_{Fa}^{\ 2}-1)/6 \leq n_{Aak} < T_{0/a} \leq T_{0/i}$$

Ilyen esetben a kezdő sorozat 2. tagja már a $(0, \Delta_a]$ intervallumon kívül van: Δ_a+j_a . Ha tehát az a. fokozatban a periódusonként kiszűrt elemek száma K_a , a jelzett intervallumban: K_a-1. A j_a sorszám minden további i. szűrési fokozatban az n_A sorszámok $(0, j_i]$ intervallumának kiszűretlen eleme marad.

A 26) összefüggés szerint, $i \neq a$ esetén, a P_i prímhez rendelt j_i sorszám elem nem a kezdő sorozat tagja, mivel j_i valamely megelőző fokozatban már kiszűrésre került. Ekkor a szűrési fokozat kezdő sorozatának legkisebb kiszűrhető eleme a $(0, \Delta_i]$ intervallumon belül n_{Ai} , vagy egy ennél nagyobb számértékű n_{Aik} elem.

Mivel a $[0, j_i]$ intervallum tartalmaz j_a típusú elemeket, az intervallum nem része az i., illetve az azt követő fokozatok Definíció 3.1.2. szerinti periódusainak. Az n_A sorszámok $[0, \Delta_{i+1})$ intervallumának elemei közül az intervallum szegmensei nem tartalmazzák az $(i$-$1)$. fokozattal bezárólag kiszűrt sorozatok összetett számokat reprezentáló tagjait, valamint $a < i$ esetekben a j_a elemeket.

A fokozatos szűrés során minden $j_{a2}=(n_{AI})_{a2}$, $j_{a3}=(n_{AI})_{a3}$, $j_{a4}=(n_{AI})_{a4}$, ... sorszám valamely további szűrési fokozatban kiszűrésre kerülő sorozatok kezdő sorozatának 1. tagja lesz. A 21) összefüggés szerint $n_{AFö+1}^{\ +}$ minden pozitív egész szám (illetve $n_{AFö+1s}$ minden negatív egész szám) értékét felvehetné, ha az $n^{-}=-1$ lehetőséget nem zárnánk ki. A lehetőség kizárásával biztosítjuk azt, hogy a sorszámokra módosított CPS sem tartalmazza az I. rendű ikerprím számtani középértékek n_{AI} sorszámait. A módosított CPS ugyanis olyan, a pozitív és negatív számtartományban végtelen számtani sorozatokból áll, amelyeknek abszolút értékben legkisebb tagjai nem részei a szitának (Lábjegyzet: Függelék IP, 7. táblázat).

DEFINÍCIÓ 3.1.11. Az n_A sorszámok meghatározott intervallumában a kiszűrt és ki nem szűrt elemek **átlagos sűrűség**e ezek számának és az intervallum összes elemszámának a hányadosa.

A **ki nem szűrt elemek átlagos sűrűségé**nek jelölése: R. Ezt a figyelembe vett intervallum megjelölése mellett kell alkalmazni. A figyelembe vett pozitív sorszám intervallumoktól függően kétféle sűrűséggel számolhatunk:

- $\boldsymbol{R_0}$ átlagos sűrűség: 0-tól az intervallum határig ki nem szűrt sorszámok számának és az intervallum határnak a hányadosa;
- $\boldsymbol{R_c}$ a szűrés meghatározott periódusán, illetve periódusain belüli átlagos sűrűség.

Az R ki nem szűrt n_A sorszám-elem sűrűségek a 6-tal osztható számintervallum Q_A elemsűrűségének 6-szorosai, és tetszőleges egész-szám intervallum Q elemsűrűségének kb. 6-szorosai:

38) $\boldsymbol{R = 6Q_A} \approx 6Q$ $\quad\boldsymbol{R_0 = 6Q_{0A}} \approx 6Q_0$ $\quad\boldsymbol{R_c = 6Q_{cA}} \approx 6Q_c$

DEFINÍCIÓ 3.1.12. Valamely szűrési fokozattal bezárólag a kiszűrt, illetve a ki nem szűrt elemek előfordulásának periódusonkénti **gyakoriság**a ezek számának és a periódus összes elemszámának a hányadosa. A kiszűrt és ki nem szűrt elemek együttes gyakoriságának számértéke: 1

DEFINÍCIÓ 3.1.13. Az **utoljára kiszűrt elemek gyakorisága ($\boldsymbol{N_i}$)**: az i. szűrési fokozatban kiszűrt valamennyi sorozat tagjainak periódusonkénti gyakorisága. A periódusokba a kiszűrt sorozatok egy-egy tagja tartozik, így 35) felhasználásával ($i>3$):

39) $$\boldsymbol{N_i := 2Z_i/\Delta_i = K_i v_i} = 2\delta_{i-1}v_i = 2(P_3-2)(P_4-2)\ldots(P_{i-1}-2)/(P_3P_4\ldots P_i) =$$
$$= (2/P_i)[(P_3-2)/P_3][(P_4-2)/P_4]\ldots[(P_{i-1}-2)/P_{i-1}] = (2/P_3)[(P_3-2)/P_4][(P_4-2)/P_5]\ldots[(P_{i-1}-2)/P_i] =$$
$$= (2/P_i)\prod_{i=4}^{i}(P_{i-1}-2)/P_{i-1} = 0{,}4\prod_{i=4}^{i}(P_{i-1}-2)/P_i$$

Függelék IP, 7. táblázat http://ikerprimekfuggelek.oldalunk.hu/site.php?sd=ikerprimekfuggelek&page=yB0uxYJD1_

$3 \le i \le 130$ tartományban N_i értékeit az Ikerprímek * Függelék IP honlap 12. táblázata tartalmazza (Lábjegyzet: Függelék IP, 12. táblázat). N_i határértéke:

40) $\mathbf{N_3 := 2/P_3 = 0{,}4} > N_4 = (2/P_4)(P_3-2)/P_3 = 0{,}1\dot{7}1428\dot{5}... \ge N_i\ (i\ge4) >$
$> \mathbf{N := \lim_{i\to\infty} N_i} = (\lim_{i\to\infty} 2/P_i) \prod_{i\ge4}(P_{i-1}-2)/P_{i-1} = 0{,}4 \prod_{i\ge4}(P_{i-1}-2)/P_i = \mathbf{6(\lim_{P\to\infty} P^{-1}) \prod_{P\ge3}(P-2)/P = 0}$

DEFINÍCIÓ 3.1.14. Az **i. szűrési fokozattal bezárólag kiszűrt elemek gyakorisága ($N_{i\Sigma}$)**: az i. szűrési fokozatot megelőző fokozatokban már kiszűrt valamennyi elem gyakoriságának ($N_{(i-1)\Sigma}$) és az utoljára kiszűrt tagok gyakoriságának (N_i) összege a fokozat periódusaiban:

41) $\mathbf{N_{i\Sigma} := N_{(i-1)\Sigma} + N_i} =$
$= 2[1/P_3 + (P_3-2)/(P_3P_4) + (P_3-2)(P_4-2)/(P_3P_4P_5) + ... + (P_3-2)(P_4-2)...(P_{i-1}-2)/(P_3P_4...P_i)] =$
$= 1 + [-(P_3-2)/P_3 + 2(P_3-2)/(P_3P_4)] + 2(P_3-2)(P_4-2)/(P_3P_4P_5) + ...$
$... + 2(P_3-2)(P_4-2)...(P_{i-1}-2)/(P_3P_4...P_i) =$
$= 1 + [-(P_3-2)(P_4-2)/(P_3P_4) + 2(P_3-2)(P_4-2)/(P_3P_4P_5)] + 2(P_3-2)(P_4-2)(P_5-2)/(P_3P_4P_5P_6) + ...$
$... + 2(P_3-2)(P_4-2)...(P_{i-1}-2)/(P_3P_4...P_i) = ...$
$... = 1 + [-(P_3-2)(P_4-2)...(P_{i-1}-2)/(P_3P_4...P_{i-1}) + 2(P_3-2)(P_4-2) ...(P_{i-1}-2)/P_3P_4...P_i)] =$
$= 1 - (P_3-2)(P_4-2)...(P_i-2)/(P_3P_4...P_i) = 1 - \delta_i/\Delta_i = 1 - \delta_i\nu_i$

$3 \le i \le 2750$ tartományban $N_{i\Sigma}$ értékeit az Ikerprímek * Függelék IP honlap 12. táblázata tartalmazza (Lábjegyzet: Függelék IP, 12. táblázat). $N_{i\Sigma}$ határértéke:

42) $\mathbf{N_{3\Sigma} = 1-(P_3-2)/P_3 = 0{,}4} \le N_{i\Sigma}\ (i\ge3) < \mathbf{N_\Sigma := \lim_{i\to\infty} N_{i\Sigma}} = \lim_{i\to\infty} (1-\delta_i\nu_i) = 1 - \prod_{i\ge3}(P_i-2)/P_i = \mathbf{1 - 3\prod_{P\ge3}(P-2)/P}$

A kiszűrt elemek előfordulásának gyakoriságát a ki nem szűrt elemek előfordulásának gyakorisága egészíti ki 1-re, ami az előzőek alapján számítható.

DEFINÍCIÓ 3.1.15. A **ki nem szűrt elemek gyakoriságának csökkenése az utoljára alkalmazott** (i.) **szűrési fokozatban (G_i)**:

43) $\mathbf{G_i := - N_i} = - 2Z_i/\Delta_i = - K_i\nu_i = - 2\delta_{i-1}\nu_i = 2(N_{(i-1)\Sigma} - 1)/P_i$

DEFINÍCIÓ 3.1.16. Az **i. szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemek gyakorisága ($G_{i\Sigma}$):** az i. szűrési fokozatot megelőző fokozatokban még ki nem szűrt elemek gyakoriságának ($G_{(i-1)\Sigma}$) az i. szűrési fokozatban kiszűrt elemek gyakoriságával (N_i) csökkentett értéke:

44) $\mathbf{G_{i\Sigma} := G_{(i-1)\Sigma} + G_i} = 1 - N_{(i-1)\Sigma} - N_i = 1 - N_{i\Sigma} = \delta_i/\Delta_i = \delta_i\nu_i = 3\prod_{i=2}^{i}(P_i-2)/P_i$

$3 \le i \le 2750$ tartományban $G_{i\Sigma}$ értékeit az Ikerprímek * Függelék IP honlap 12. táblázata tartalmazza (Lábjegyzet: Függelék IP, 12. táblázat). $G_{i\Sigma}$ határértéke:

45) $\mathbf{G_{3\Sigma} = (P_3-2)/P_3 = 0{,}6} \ge G_{i\Sigma}\ (i\ge3) > \mathbf{G_\Sigma := \lim_{i\to\infty} G_{i\Sigma}} = \lim_{i\to\infty} \delta_i\nu_i = \prod_{i=3}^{\infty}(P_i-2)/P_i = \mathbf{3\prod_{P\ge3}(P-2)/P}$

3.2. A fokozatos szűrés algoritmusának műveletei (i. szűrési fokozat)

Az i. szűrési fokozatban a megelőző fokozatokban még ki nem szűrt, ezért potenciálisan I. rendű ikerprímeket reprezentáló n_A sorszám elemek Z_i P_i számú, Δ_i különbségű végtelen számtani sorozatából szűrjük ki azoknak az összetett számokat reprezentáló $n_{AFöi} = n_{Föi}+1$ és $n_{ABöi} = n_{Böi}$ elemeknek a végtelen számtani sorozatait, amelyekre:

46) $P_i\,|(6n_{AFöi}-1) \quad \wedge \quad P_i\,|(6n_{ABöi}+1)$

A P_i-nél kisebb prímtényezővel való oszthatóság miatt kiszűrhető elemek az i. fokozatot megelőző fokozatokban kerültek kiszűrésre, a további műveletekben pedig a potenciálisan I. rendű ikerprímeket reprezentáló elemek halmazából a P_i-nél nagyobb prímtényezőkkel való oszthatóság miatt még ki nem szűrt, kritérium szerinti elemeket kell elkülöníteni.

A kezdeti szűrési fokozatokban elvégzett műveletek során ki nem szűrt n_A számtani középérték sorszámok táblázatai (Lábjegyzet: I. r. ikerprímek fokozatos szűrése, $i = 2, 3, 4, 5$) azok $[0, \Delta_{i+1})$ intervallumát úgy mutatják be, hogy abban

Függelék IP, 12. táblázat http://ikerprimekfuggelek.oldalunk.hu/userimages/ikerprimekfuggelek/files/f10_ir_ip_szur_jelll_www.oldalunk.hu_.pdf
I. r. ikerprímek fokozatos szűrése http://www.ikerprimekfuggelek.oldalunk.hu/userimages/ikerprimekfuggelek/files/f09_ir_ip_sz_1_5_fok_www.oldalunk.hu_.pdf

- nem szerepelnek az *i.* fokozatot megelőzően már kiszűrt $n_{Aö}$ sorszámok és a $(0,\ j_{i-1}]$ részintervallum megelőző fokozatokban ki nem szűrhető, I. rendű ikerprímeket reprezentáló $j_a = (n_{AI})_a$ elemei;
- ki van emelve (meg van jelölve) az *i.* fokozatban kiszűrésre kerülő sorozatoknak az intervallumba eső P_{i+1} számú tagja, és ezek között, ha van – $i = a$ esetben –, eltérő jelöléssel van ellátva a $(0,\ j_i]$ részintervallumba tartozó ki nem szűrhető ($j_i = j_a$) tag [l. a 27) összefüggést];
- meg vannak jelölve az $(i+1)$. fokozatban kiszűrésre (kiemelésre) kerülő sorozatok 1. tagjai;
- meg vannak jelölve a $(j_i\ ,\ n_{Ai})$ részintervallum ki nem szűrt és a további fokozatokban már ki nem szűrhető, tehát I. rendű ikerprímeket reprezentáló elemei.

A műveletek a következő algoritmus szerint végezhetők:

1. művelet: ***Konvertálás***

A megelőző szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt és az $(i-1)$. fokozatban kiszűrt n_A sorszámok Δ_{i-1} különbségű sorozatainak nem negatív, legkisebb P_i számú elemét az $(i-1)$. fokozat $[0,\ \Delta_i)$ intervallumának szegmensei sorokba rendezve tartalmazzák. Ezek közül a ki nem szűrt, rendezett sorozatok száma:

$\boldsymbol{K_i + \delta_i} = Z_i P_i = (P_2-2)(P_3-2)...(P_{i-1}-2)P_i$ 34), 35) és 36) összefüggés

A ki nem szűrt sorozatok legkisebb pozitív P_i számú elemét, a 46) kritérium szerint az $(i-1)$. fokozatban köztük kijelölt két-két taggal, a $[0,\ \Delta_{i+1})$ intervallum $\boldsymbol{Z_i}$ számú szegmensének első oszlopaivá alakítjuk.

2. művelet: ***Sorozatok képzése***

A szegmensek 1. oszlopának tagjait sorozat-kezdetként felhasználva, Δ_i különbséggel végtelen számtani sorozatok legkisebb pozitív P_{i+1} számú tagját képezzük, ezek alkotják a $(0,\ \Delta_{i+1}]$ intervallum szegmenseinek sorait. Az *i.* szűrési fokozat periódusainak elemszáma:

$\boldsymbol{\Delta_i} = P_3P_4...P_i$ 23) összefüggés

3. művelet: ***Szűrés***

A szegmensek 1. oszlopában a 46) kritérium szerint megjelölt két-két taghoz tartozó sorozatokat „kiszűrjük” (pl. a sorozat elemeit a sorozatkezdő tag kiemelésére használt jelzéssel látjuk el). Az Észrevétel 3.1.1. szerint $P_i = P_a = P_{a+1}-2$ esetben a kezdő sorozat a kiszűrhetőktől eltérően jelölt 1. tagja ($j_i = j_a$) nem szűrhető ki, ez az elem a $[0,\ j_i]$ intervallumba tartozik, ezért nem tagja az *i.* és a további fokozatok periódusainak, valamint a további fokozatok szegmenseinek sem. A szűrés jellemzői:

Az *i.* fokozatban kiszűrt sorozatok száma:

$\boldsymbol{K_i} = 2Z_i = 2(P_2-2)(P_3-2)...(P_{i-1}-2)$ 35) összefüggés

Az *i.* fokozatban kiszűrt elemek gyakorisága (periódusonként) az n_A sorszámok között:

$\boldsymbol{N_i} = K_i v_i$ 39) összefüggés

Az *i.* szűrési fokozattal bezárólag kiszűrt elemek gyakorisága (periódusonként) az n_A sorszámok között:

$\boldsymbol{N_{i\Sigma}} = 1- \delta_i v_i$ 42) összefüggés

Az *i.* fokozatban ki nem szűrt sorozatok száma:

$\boldsymbol{\delta_i} = Z_i(P_i-2)$ 36) összefüggés

Az *i.* fokozatban ki nem szűrt elemek gyakoriságának csökkenése (periódusonként):

$\boldsymbol{G_i} = - K_i v_i$ 43) összefüggés

Az *i.* szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemek gyakorisága (periódusonként):

$\boldsymbol{G_{i\Sigma}} = \delta_i v_i$ 44) összefüggés

Az *i.* fokozatban (és a megelőző fokozatokban) kiszűrt és j_i -nél nem nagyobb, ki nem szűrhető (megjelölt) n_A sorszám elemek a következő szűrési fokozatokban nem szerepelnek, azok szegmenseinek nem elemei.

4. művelet: ***Kijelölés***

Az i. szűrési fokozattal bezárólag szűrt $[0, \Delta_{i+1})$ n_A sorszám intervallum szegmenseinek ki nem szűrt – P_{i+1} elemszámú – soraiban a 6) kritériumnak megfelelően, az Észrevétel 3.1.1. figyelembe vételével, kijelöljük azt a két-két tagot, amelyek az $(i+1)$. szűrési fokozatban kiszűrendő sorozatok 1. (legkisebb pozitív) tagjai. Eszerint, ha $P_{i+1}=P_a=P_{a+1}-2$, az $(i+1)$. szűrési fokozat kezdő sorozatának 1. tagja nem szűrhető ki, ezért azt a kiszűrésre kerülő sorozatok 1. tagjaitól eltérően jelöljük meg.

ÉSZREVÉTEL 3.2.1. A 4. művelet során tehát az n_A sorszámok soraiban az $(i+1)$. szűrési fokozatban kiszűrésre kerülő, a 2) szerinti F és B számtani sorozatba [Lábjegyzet: 1. Bevezetés, 2)] tartozó összetett számot reprezentáló $(n_{AFöi+1}\ ,\ n_{ABöi+1})$ elem-párokat jelöljük ki, melyekre a 46) kritériumnak megfelelően:

$$n_{AFöi+1} = n_{Föi+1}+1 \qquad\qquad n_{ABöi+1} = n_{Böi+1}$$
$$P_{i+1} \mid (6n_{AFöi+1}-1) \qquad \wedge \qquad P_{i+1} \mid (6n_{ABöi+1}+1)$$

Ezen túlmenően, általában megállapítható:

47) $P_i \mid (n_{AFöi} + n_{ABöi})$

Az $(n_{AFöi}\ ,\ n_{ABöi})$ elemek tehát a $[0, \Delta_i)$ n_A sorszám intervallum szegmenseinek ki nem szűrt – P_i elemszámú – soraiban a 46) és 47) oszthatósági kritériumok szerint párosíthatók. Ezen kívül léteznek még a hivatkozott kritériumok szerinti olyan, általában másik, de szintén azonos sorban előforduló $[(n_{AFöi})_T\ ,\ (n_{ABöi})_T]$ elem-párok is, hogy:

48) $T_{0/i} = [n_{AFöi} + (n_{ABöi})_T]/2 = [(n_{AFöi})_T + n_{ABöi}]/2 = \Delta_i/2$

Az algoritmus szerint rendezett sorok között, a 0-val kezdődő, ki nem szűrhető sorban kijelölésre kerülő elem-párra a 46), 47) és 48) kritérium is teljesül. Ennek alapján megállapítható, hogy a szűrt $[0, \Delta_{i+1})$ n_A sorszám intervallum szegmenseiben a 48) kritérium szerint kijelölendő elem-párok számtani középértékeként a $\boldsymbol{T_{0/i+1}}$ **tükörpont megjelölhető**

$i > 1$ esetekben a 0-val kezdődő sornak az elemei között, ezen kívül
$i > 2$ esetekben a sor szegmensének további sorai között, ezen kívül
$i > 3$ esetekben a 2 és 7, illetve 8 és 3 utolsó számjegyű n_A sorszámok szegmensei között,
$i > 4$ esetekben az 5-tel osztható n_A sorszámok szegmensei között,
$i > 5$ esetekben az 5-tel osztható n_A sorszámok további szegmensei között, stb.:

összesen $\boldsymbol{i - 1}$ **helyen** (Lábjegyzet: I. r. ikerprímek fokozatos szűrése, 1-5 fok.). Ennek megfelelően – az i. szűrési fokozat 4. műveleteként – a $[0, \Delta_{i+1})$ n_A sorszám intervallum szegmenseiben kijelölhető elemek, illetve az $(i+1)$. fokozatban kiszűrésre kerülő végtelen számtani sorozatok száma:

$$K_{i+1} = 2Z_i(P_i-2) = 2Z_{i+1}$$

ÉSZREVÉTEL 3.2.2. Az I. rendű ikerprímek szűrésének 3. fokozata szerint (Lábjegyzet: I. r. ikerprímek fokozatos szűrése, 9. táblázat) a 2 különbségű prímszám-párok $A_I=6n_{AI}$ számtani középértékeik utolsó számjegye alapján – a $(3, 5)$ és $(-3, -5)$ számpár kivételével – 3 típusba sorolhatók:

49) $A_{I/0} \equiv 0 \pmod{30} \Leftrightarrow (n_{AI/0})_0 \equiv 0 \pmod{10} \wedge (n_{AI/0})_5 \equiv 5 \pmod{10}$
$A_{I/2} \equiv 2 \pmod{10} \Leftrightarrow (n_{AI/2})_2 \equiv 2 \pmod{10} \wedge (n_{AI/2})_7 \equiv 7 \pmod{10}$
$A_{I/8} \equiv 8 \pmod{10} \Leftrightarrow (n_{AI/8})_8 \equiv 8 \pmod{10} \wedge (n_{AI/8})_3 \equiv 3 \pmod{10}$

Nem reprezentálnak I. rendű ikerprímeket azok a 6-tal osztható $A_ö$ számok és sorszámaik, melyekre:

50) $A_{ö/4} \equiv 4 \pmod{10} \Leftrightarrow (n_{Aö/4})_4 \equiv 4 \pmod{10} \wedge (n_{Aö/4})_9 \equiv 9 \pmod{10}$
$A_{ö/6} \equiv 6 \pmod{10} \Leftrightarrow (n_{Aö/6})_6 \equiv 6 \pmod{10} \wedge (n_{AIö/6})_1 \equiv 1 \pmod{10}$

$i>3$ esetben a szűrési fokozatok periódusaiban a fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemek a 49) szerinti típusoknak egyenlő arányban felelnek meg (Lábjegyzet: I. r. ikerprímek fokozatos szűrése, 8-11. táblázat). A fokozatos szűrés szabályai szerint tehát (az x-nél nem nagyobb I. rendű ikerprímek sűrűségét, illetve számát a típusok alapján jelölve) megállapítható:

51) $\boldsymbol{Q_{2/0}(x) := \pi_{2/0}(x)/x} \approx \boldsymbol{Q_{2/2}(x) := \pi_{2/2}(x)/x} \approx \boldsymbol{Q_{2/8}(x) := \pi_{2/8}(x)/x} \approx \pi_2(x)/3x$
$Q_2(x) = Q_{2/0}(x) + Q_{2/2}(x) + Q_{2/8}(x) = [\pi_{2/0}(x) + \pi_{2/2}(x) + \pi_{2/8}(x)]/x = \pi_2(x)/x$
$Q_{2/0} \sim Q_{2/2} \sim Q_{2/8} \sim Q_2/3$

I. r. ikerprímek fokozatos szűrése
http://www.ikerprimekfuggelek.oldalunk.hu/userimages/ikerprimekfuggelek/files/f09_ir_ip_sz_1_5_fok_www.oldalunk.hu_.pdf